

200 éves a kerékpár

Pósfalvi Ödön – Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Pósfalvi Ödön okl. közlekedésmérnök, c. egyetemi docens. Pályafutása során műszaki doktori és PhD. fokozatot szerzett a műszaki tudomány területén és a párizsi FEANI-tól EUR. ING. címet kapott. A BME-n évtizedekig egyetemi hallgatókat és szakmérnököket oktatott és jegyzeteket írt. 2005-ben a Britannica Hungarica Világenciklopédia pályázatán I. díjat kapott. Szakterülete a gumiabroncs mechanika és a gépjárművek megbízhatóságának kutatása.

A tanulmány témaválasztását a következő szempontok indokolják.

1. *Johann Bernoulli* (1667 – 1748) 1717-ben ismertette a virtuális munka elvét – éppen 300 évvel ezelőtt - a kerékpár főegyenletét az elv alapján vezetem le [1] [2].
2. *Carl Drais von Sauerbronn* (1785 – 1851) 1817-ben - éppen 200 évvel ezelőtt – szabadalmaztatta a mai kerékpár őseit. A feltaláló abból a fizikai felismerésből indult ki, hogy a gyalogló ember súlypontja minden egyes lépésnél kissé felemelkedik, majd lesüllyed és ez a folyamat az izomerőknek munkát okoz – tehát energia pazarlást jelent – azonban kerékpárra ülve súlypontja az úttal párhuzamosan mozog.
3. A kerékpár szakszerű és baleset-megelőző működtetésének egyik feltétele a kerékpár mechanikai viselkedésének ismerete. A statikai és dinamikai egyenletek alapján betekinthetünk ebbe a folyamatba.

A kerékpár egynyomú, izomerővel és/vagy segédmotorral hajtott, kormányozható és fékezhető egyéni közlekedési eszköz.

A kerékpár közlekedés jellemzője a mozgás, amely az emberi test és összetett járműszerkezet együttműködése térben és időben.

A klasszikus kerékpárváz merev rudakból összeállított járműszerkezet, csukló, rugó és lengéscsillapító nincs benne. A kormánymű és a pedál csapágyazott tengely. Ma már egyes kerékpárvázakba csuklót, rugót és lengéscsillapítókat építenek be, ezek a járműelemek a kerékpár dinamikai viselkedésére hatást gyakorolnak.

Legyen az úttest vízszintes, sík, szilárd, érdes lemez. Ha a kerékpárt földúton vagy terepen használják, akkor a gumiabroncs alatt a pálya deformálódik, az ilyen eset tárgyalása a talajmechanika bevonásával végezhető el. A gumiabroncs és a szilárd út között mindig jelen van egy anyagkeverék, ami többféle talaj, víz, hó, jég, növényi hulladék és szennyeződés lehet, ez a kompozitum az abroncs tapadásra hatással van. A kompozitum miatt az u. n. tapadási tényező - ami az út és a gumiabroncs kapcsolat egyik paramétere – véletlenül veszi fel értékeit.

Legyen az F_i tapadási erő arányos az N_i útreakcióval, az arányossági tényező a μ_i tapadási tényező a következő egyenlet szerint.

$$\text{Legyen az } F_i = \mu_i N_i \quad (i = 1,2 \text{ a kerekek jele}) \quad (1)$$

Kerékpározás közben a gumiabroncs állapotát a gördülő-tapadás jellemzi. A szilárd úton az abroncs összenyomódik és deformálódik. A gumiabroncs felfekvése az úton nem

szimmetrikus idom, ezért az N_i pályareakció erő f_i karral a haladás irányába tolódik el, ez okozza a gördülési ellenállás nyomatékát, ami a jelen esetben

$$|\mathbf{f}_i \times \mathbf{N}_i| = f_i N_i \quad (i = 1, 2 \text{ a kerekek jele}) \quad (2)$$

A gumiabroncsos kerék működése közben mindig $s > 0$ szlippel gördül és a kerékpár jellemzője, hogy a hajtott (első) kerék és a hajtó (hátsó) kerék szlipje különbözik egymástól ($0 < s \leq 1$). Az $s=1$ adat blokkolt, fékezett kerékre vonatkozik.

A hajtott kerék s_1 szlip egyenlete a következő összefüggés

$$\ddot{x}(1-s_1) - R_1 \ddot{\varphi}_1 = 0 \quad (3)$$

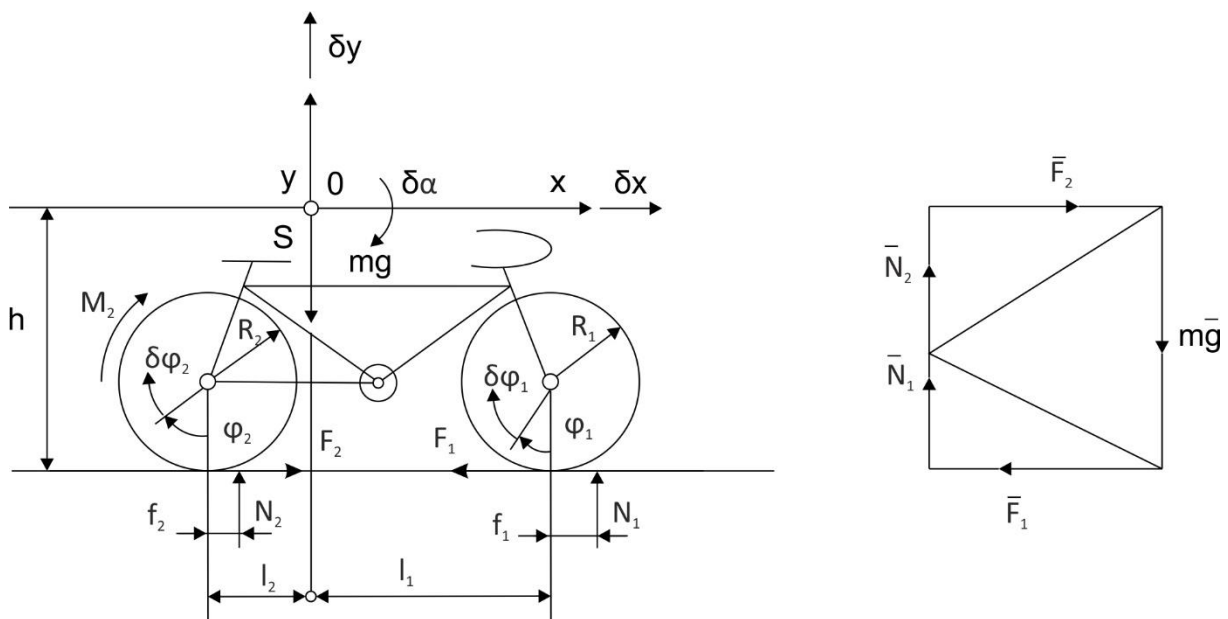
A hajtó kerék s_2 szlip egyenlete

$$\ddot{x} - R_2(1-s_2)\ddot{\varphi}_2 = 0 \quad (4)$$

ahol \ddot{x} a kerék tömegközéppont gyorsulása, R_i a kerék sugara, $\ddot{\varphi}_i$ a kerék szöggyorsulása ($i=1,2$)

A kerékpár statikája

Az ember-kerékpár rendszer az mg szabaderő és az F_1 F_2 N_1 N_2 kényszer erők hatására van egyensúlyban (1. ábra)



1. ábra A kerékpár statikája $M_2 > 0$ és az erők vektorábrája

$$\mathbf{mg} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 = \mathbf{0} \quad (5)$$

A $K(0xy)$ derékszögű koordináta rendszer kezdőpontját a két test tömegközéppontjában vesszük fel, az x tengely vízszintes. A virtuális munka jellemzőit a következő skalárokkal írjuk le: δx , δy az elmozdulás, $\delta \varphi_1$, $\delta \varphi_2$, $\delta \alpha$ a szögelfordulás jele. Működjön a hajtókerékre $M_2 > 0$ határnyomaték, hatására a rendszer nyugalomban van. Ekkor az erők és nyomatékok

virtuális munkaegyenlete a (6) összefüggés. A jobboldalon a második és a harmadik tag az F_i tapadási erők virtuális munkája ($i=1,2$).

$$\delta W = M_2 \delta \varphi_2 - F_1 (\delta x - R_1 \delta \varphi_1) - F_2 (R_2 \delta \varphi_2 - \delta x) + (\sum N_i - mg) \delta y - \sum f_i N_i \delta \varphi_i + [h(F_1 - F_2) - (l_1 + f_1)N_1 + (l_2 - f_2)N_2] \delta \alpha = 0 \quad (i=1,2) \quad (6)$$

A (6) egyenletben hét ismeretlen van, ezek a következők:

$$F_1 \quad F_2 \quad N_1 \quad N_2 \quad f_1 N_1 \quad f_2 N_2 \quad M_2$$

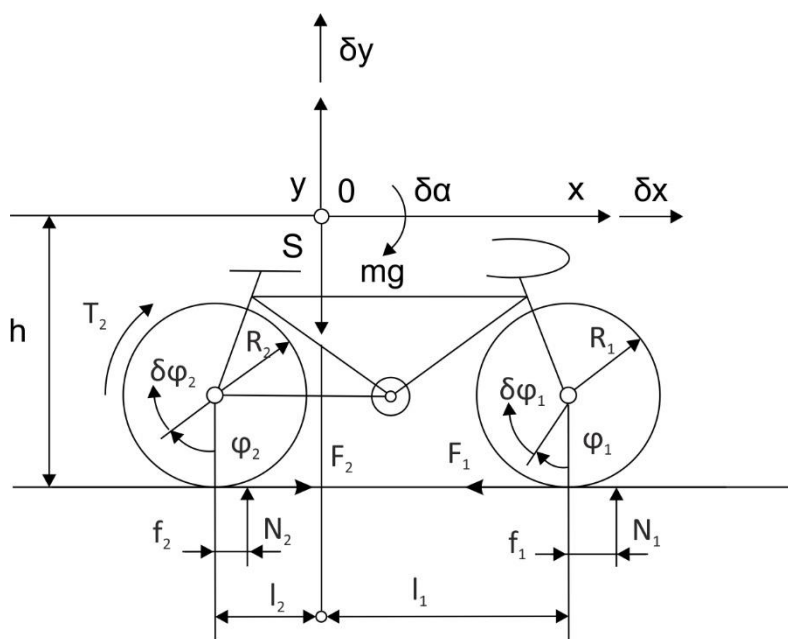
A (6) egyenlet öt egymástól független egyenletet foglal magában, ezért a megoldáshoz az alábbi két összefüggés tartozik.

$$F_1 - \mu_1 N_1 = 0 \quad F_2 - \mu_2 N_2 = 0 \quad (7)$$

A (6) (7) egyenlet alapján a kerékpáros erőrendszere statikailag határozott.

A kerékpár dinamikája

A hajtókerékben működő $T_2 > M_2 > 0$ nyomaték hatására a kerékpáros elindul. (2. ábra)



2. ábra A kerékpár dinamika $T_2 > M_2 > 0$

A rendszer δW virtuális munkaegyenlete a tehetetlenségi törvény figyelembe vételével a (8) összefüggés.

$$\delta W = T_2 \delta \varphi_2 - m \ddot{x} \delta x - F_1 (\delta x - R_1 \delta \varphi_1) - F_2 (R_2 \delta \varphi_2 - \delta x) + (\sum N_i - mg) \delta y - \sum (f_i N_i + I_i \ddot{\varphi}_i) \delta \varphi_i + [h(F_1 - F_2) - (l_1 + f_1)N_1 + (l_2 - f_2)N_2 - \sum I_i \ddot{\varphi}_i] \delta \alpha = 0 \quad (i=1,2) \quad (8)$$

ahol I_i a kerek tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre ($i=1,2$).

A (8) egyenletben kilenc ismeretlen van, ezek a következők:

$$F_1 \quad F_2 \quad N_1 \quad N_2 \quad f_1 N_1 \quad f_2 N_2 \quad \ddot{\varphi}_1 \quad \ddot{\varphi}_2 \quad \ddot{x}$$

Mivel a (8) munkaegyenletből öt fő egyenlet vezethető le, ezért a megoldáshoz az alábbi segédegyenleteket írjuk fel.

$$\ddot{x}(1-s_1) - R_1 \ddot{\varphi}_1 = 0 \qquad \ddot{x} - R_2(1-s_2) \ddot{\varphi}_2 = 0 \qquad (9)$$

$$F_1 - \mu_1 N_1 = 0 \qquad F_2 - \mu_2 N_2 = 0 \qquad (10)$$

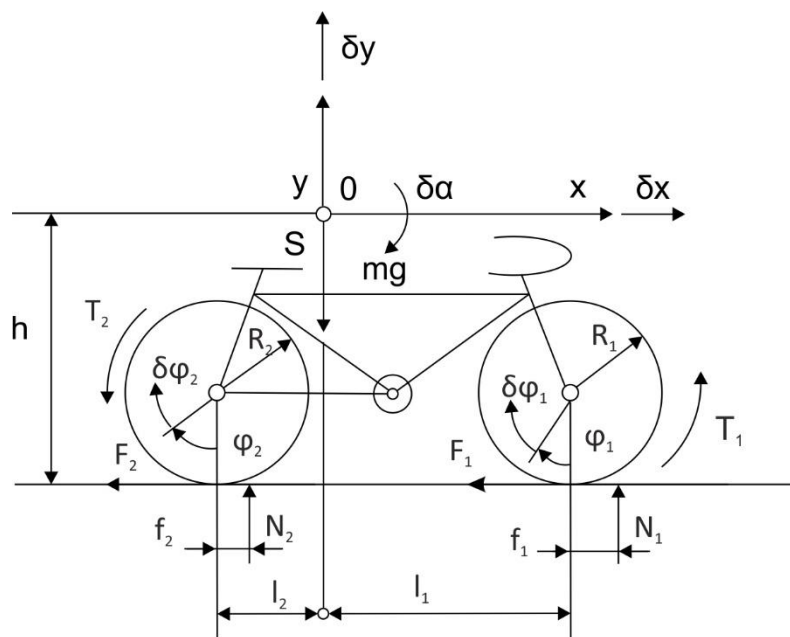
A (8) (9) (10) egyenletek alapján a kerékpár dinamikailag határozott közlekedési eszköz.

A kerékpár fékezése

A kerékpár működése közben a legfontosabb mozgásállapot a fékezés, aminek oka lassítás, megállási szándék vagy baleset elhárítása lehet. A kerékpáros beavatkozása szerint a fékezésnél többféle eset fordulhat elő, ezért a következő fékezési módokat vizsgáljuk meg.

Fékezés két keréssel.

Ekkor az első kerékre $T_1 < 0$, a hátsó kerékre $T_2 < 0$ féknyomaték működik (3. ábra)



3. ábra A kerékpár fékezése $T_1 < 0$; $T_2 < 0$

A fékezés δW virtuális munka egyenlete a (11) összefüggés.

$$\delta W = m \ddot{x} \delta x - \sum F_i (\delta x - R_i \delta \varphi_i) + (\sum N_i - mg) \delta y + \sum \left(I_i \ddot{\varphi}_i - f_i N_i - T_i \right) \delta \varphi_i$$

$$+ [h(F_1 + F_2) - (l_1 + f_1)N_1 + (l_2 - f_2)N_2 + \sum I_i \ddot{\varphi}_i] \delta \alpha = 0 \qquad (i=1,2) \qquad (11)$$

A (11) munkaegyenletből a következő fő egyenleteket kapjuk

$$-F_1 - F_2 + m\ddot{x} = 0$$

$$N_1 + N_2 - mg = 0$$

$$h(F_1 + F_2) - (l_1 + f_1)N_1 + (l_2 - f_2)N_2 + I_1\ddot{\varphi}_1 + I_2\ddot{\varphi}_2 = 0 \quad (12)$$

$$F_1R_1 - f_1N_1 - T_1 + I_1\ddot{\varphi}_1 = 0$$

$$F_2R_2 - f_2N_2 - T_2 + I_2\ddot{\varphi}_2 = 0$$

A (12) fő egyenletrendszerben kilenc ismeretlen van, ezek a következők

$$F_1 \quad F_2 \quad N_1 \quad N_2 \quad f_1N_1 \quad f_2N_2 \quad \ddot{\varphi}_1 \quad \ddot{\varphi}_2 \quad \ddot{x}$$

Az ismeretlenek kiszámítására a (12) főegyenletekhez a (13) (14) segédegyenleteket csatoljuk.

$$\ddot{x}(1-s_1) - R_1\ddot{\varphi}_1 = 0 \quad \ddot{x}(1-s_2) - R_2\ddot{\varphi}_2 = 0 \quad (13)$$

$$F_1 - \mu_1N_1 = 0 \quad F_2 - \mu_2N_2 = 0 \quad (14)$$

A fékezett kerékpár dinamikailag határozott rendszer.

A kétkerekes fékezés (12) (13) (14) egyenletrendszeréből vezetjük le az egykerekes fékezés eseteit.

Csak elsőkerék fékezésnél a következő féknyomatékok működnek: $T_1 < 0$; $T_2 = 0$.

Hátsókerék fékezésnél a fékhatást $T_1 = 0$; $T_2 < 0$ nyomatékok okozzák.

Összehasonlítva a kétféle fékezési módot megállapítható, hogy az elsőkerék fékezés erősebb fékhatást valósít meg, mint a hátsókerék fékezés, ugyanakkor kisebb menetstabilitást biztosít a kerékpárosnak. Hátsókerék fékezésnél nagyobb a kerékpáros stabilitása és ez az állapot kedvező a baleset-megelőzés és a közlekedésbiztonság szempontjából.

A kerékpáros úgy is fékezhethet, hogy az elsőkerék blokkol és csúszik az úton. Ekkor $s_1 = 1$

$\ddot{\varphi}_1 = 0$ $\mu_1 = \mu_0$ ahol μ_0 a gumiabroncs csúszási tényezője. Ez az állapot különösen veszélyes, mert a kerékpáros átbukhat az első keréken.

Lehet olyan fékezési mód, amikor az első kerék blokkolva fékezik és a hátsó kerék már éppen elválik az úttól. E fékezés jellemzői: $s_1 = 1$ $\ddot{\varphi}_1 = 0$ $\mu_1 = \mu_0$ $N_2 = 0$ $F_2 = 0$. Ez az eset éppen azt az esetet írja le, amikor a kerékpáros átbukása beindul az első keréken.

Intenzív fékezésnél a $T_1 < 0$; $T_2 < 0$ féknyomatékok a kerekek egyidejű blokkolását és csúszását okozhatják. Ha ez az állapot létrejön, akkor ezt $s_1 = s_2 = 1$ $\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2 = 0$ $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ paraméterek jellemzik.

A statikus és dinamikus állapot és fékezés egyenletrendszerét célszerű az

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{a} \quad (15)$$

alakú mátrixegyenlettel megoldani, ahol \mathbf{x} az ismeretlenek oszlopvektora.

Ekkor a végső megoldás

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} \quad (16)$$

A kerékpár a szárazföldi közlekedési eszközök halmazában olyan egyszerű gép, amely sokféle célra használható.

Az izomerővel történő kerékpározás kíméli környezetünket és energiatakarékos közlekedést valósít meg.

A lejtős úton végrehajtott fékezés paraméterei a bemutatott kerékpár modell adaptációjával kiszámíthatók, továbbá a kanyarban történő kerékpározás erőjátéka térbeli erőrendszer alapján vizsgálható. A szövegszerkesztés Stelcz Gyula okl. informatikus mérnök munkája.

Összefoglalás

A tanulmány a kerékpár mechanikai viselkedését írja le, a statika a dinamika és a fékezés fő egyenleteit a virtuális munka elve alapján tárgyalja. Részletesen foglalkozik a gumiabroncsos kerék menettulajdonságaival. A kerékpáros a közlekedés egyik résztvevője, ezért a bicikli fékezés egyes eseteit az emberi élet védelme szempontjából elemzi.

Irodalom

1. Korányi I.: Tartók sztatikája. Tankönyvkiadó, Budapest, 1953.
2. Tasnádi P., Skrapits L., Bérces Gy.: Mechanika I. Dóm-Dialóg Campus Kiadó, Budapest-Pécs, 2013
3. Németh F.: A kerékpár fékezésének fizikája. ELTE. Természettudományi Kar, Budapest, Szakdolgozat, 1997.
4. Lovass-Nagy V.: Mátrixszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
5. Budó Á.: Mechanika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.
6. Zobory I.: Általános járműgéptan. Typotex Könyvkiadó, Budapest, 2011.
7. Jankó D.: Közúti közlekedésbiztonság. Novadat, Győr, 1977.